الإبداع هو أن يخرج الإنسان من وحل الفشل إلى إنسان يضرب به المثل

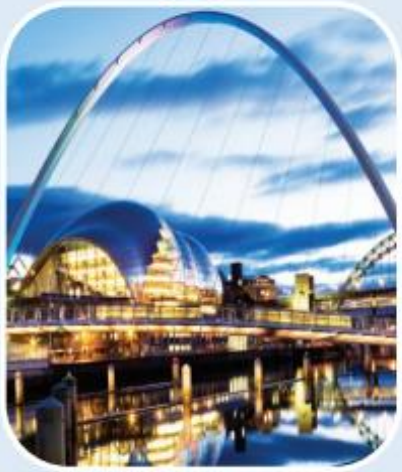
الرياضيات المتقدمة

New 2023

فصل دراسي ثان

سلطنة عمان

11



ملخص

الوحدة السابعة

مزيد من الدوال

اعداد

نصر حسنين

71724125

ماذا نتعلم ؟

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٧-١ تذكر القيمة المطلقة لأي عدد أو تعبير معطى وتستخدمها.

٧-٢ تذكر الدالة الصحيحة وتستخدمها.

٧-٣ ترسم منحنيات دوال القيمة المطلقة والدوال الدالة الصحيحة ، وتستخدمها لحل المسائل.

٧-٤ تحوّل بين الصورة اللوغارتمية والصورة الأسية ذات الأساس ١٠

٧-٥ تحوّل بين الصورة اللوغارتمية والصورة الأسية ذات الأساس العام 'أ'

٧-٦ تبسّط وتقيّم اللوغاريتمات باستخدام قوانين اللوغاريتم، حيث لا حاجة لتغيير الأساس.

٧-٧ تحل المعادلات اللوغاريتمية.

٧-٨ تحل معادلات حيث يظهر المجهول في القوة.

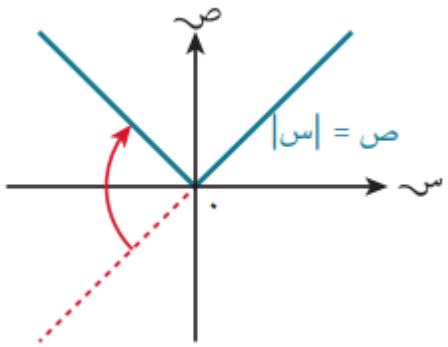
٧-٩ تفهم تعريف وخصائص كل من هـ^{س} و لـو(س) ومنحنياتهما، والعلاقة بينهما كدوال عكسية.

١-٧ دالة المطلق

القيمة المطلقة **absolute value** للعدد أ هي المسافة التي يبتعدها العدد أ عن نقطة الأصل (٠) على خط الأعداد، ويرمز إليها بالرمز |أ| وهي قيمة موجبة دائمًا بحيث:

$|أ| = |-أ|$

فمثلًا: $|٣| = ٣$ ، $|-٣| = ٣$.



وتكتب دالة المطلق على الشكل د(س) = |س|، وتعرّف حسب الصيغة:

$$د(س) = |س| = \begin{cases} س، & س \geq ٠ \\ -س، & س < ٠ \end{cases}$$

حيث مجالها هو ع ومداها د(س) $\geq$ ٠

١) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ) |٥|　　ب) |-٣|　　ج) |-٢,٥|

1 حلّ المعادلات الآتية:

ب) $|٢س - ١| = ٣$

ج) $|س - ٤| = ٢س + ١$

2 حلّ المعادلة $|٣س + ٤| = |س + ٥|$

3 حلّ المعادلة $|س + ٣| + |س + ٥| = ١٠$

درب نفسك

١) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

د $|(-٣)^{٢}|$

هـ $\sqrt{|-٩|}$

٢) حلّ كلًا ممّا يأتي:

أ $|٤س - ٣| = ٧$

ب $|١ - ٢س| = -٥$

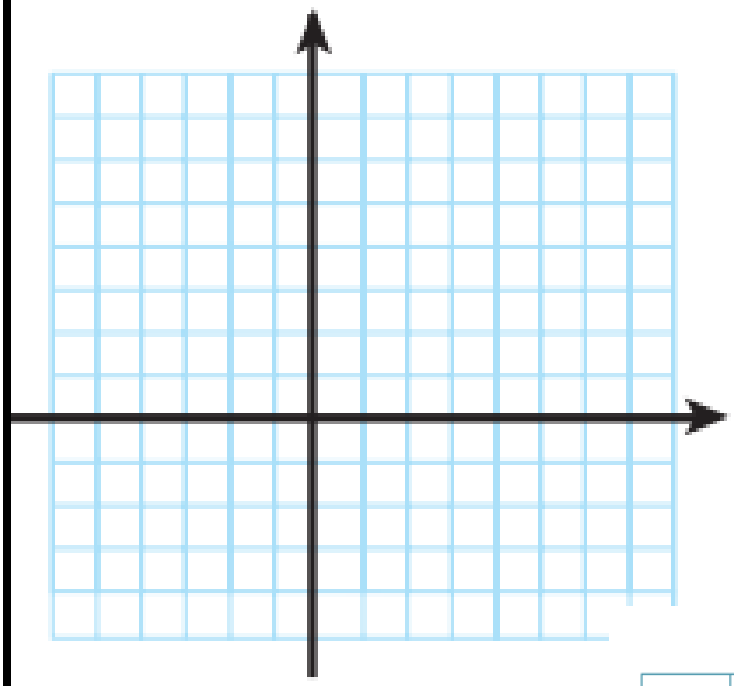
ج $\left|\frac{٣س - ٢}{٥}\right| = ٤$

٣) حلّ كلًا ممّا يأتي:

أ $|٢س + ١| = |س|$

د $|٣س - ٥| = س + ١$

التمثيل البياني



٨) إذا علمت أن ص = |س − ٣| + ٢.

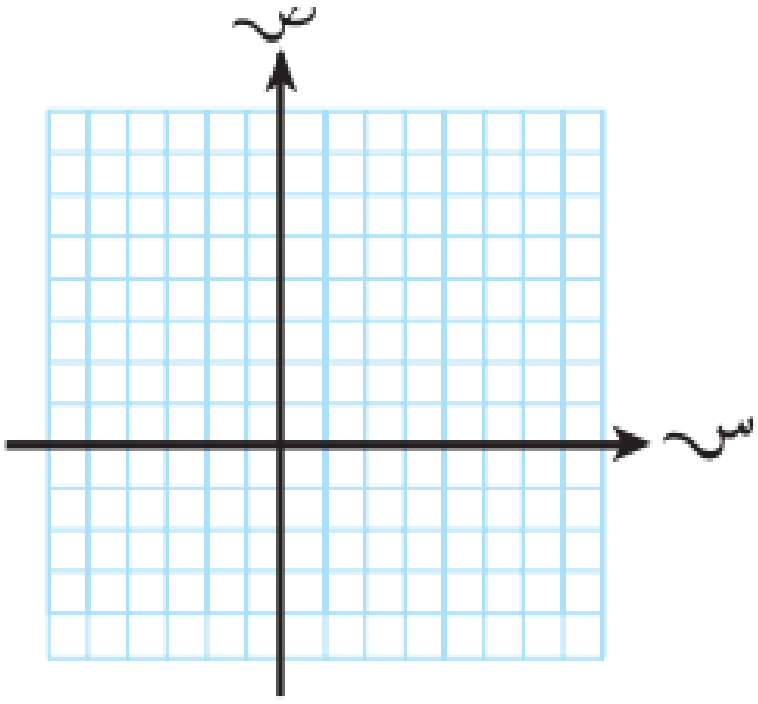
أ أكمل الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	٥		٣				

ب ارسم التمثيل البياني ص = |س − ٣| + ٢ حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٦

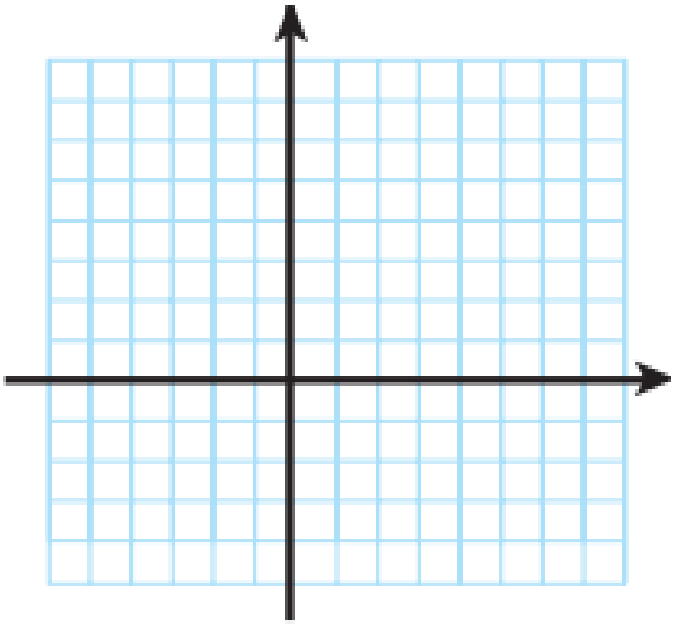
٩) ارسم التمثيل البياني لكلّ من الدوالّ الآتية. ثم حدد إحداثيات نقطة الرأس لكل منها:

أ ص = |س + ١| + ٢ ب ص = |س − ٥| − ٢ ج ص = ٢ − |س|

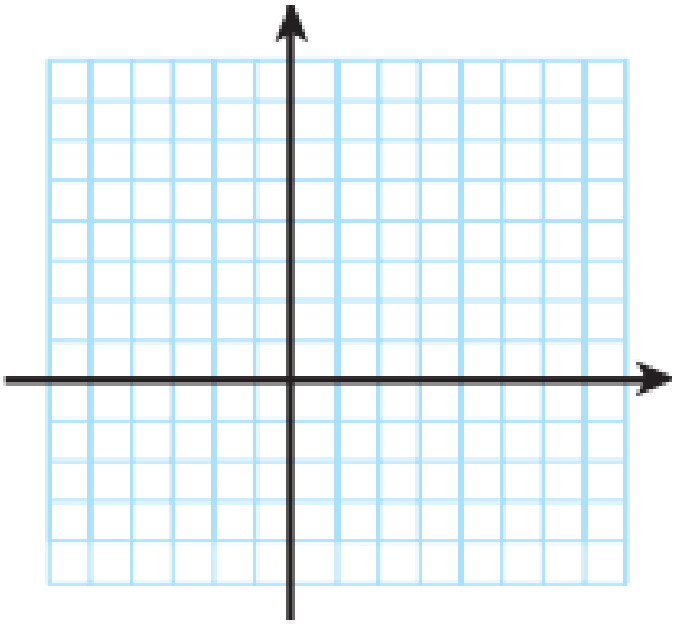


حلّ المعادلة

1 $|س - ٤| = ٢س + ١$



2 حلّ المعادلة $|٣س + ٤| = |س + ٥|$



الواجب

١) حلّ كلًّا مما يأتي :

أ $|س + ٢| = ٥$

ب $|س - ١| = ٧$

ز $|٢س + ١| = |٣س + ٩|$

ح $|٥س + ١| = |١١ - ٢س|$

٢) حلّ المعادلات الآتية:

أ $|س + ١| + |١ - س| = ٢$

ب $|س + ١| - |١ - س| = ٢$

٤) حل المعادلات الآتية:

أ $س + |٢س - ١| = ٣$

ب $٣ + |٢س - ١| = س$

٥) حل المعادلات الآتية:

أ $|س^٢ - ٤| = ١٢$

ب $|٦ + س^٢| = ٥س$

ج $|س^٢ + ٣س| = س + ١$

---

٧) ارسم التمثيلات البيانية لكل من الدوالّ الآتية، مبينًا إحداثيات النقاط حيث تتقاطع التمثيلات البيانية مع المحورَين. ، ثم أعِد تعريف كل دالّة من خلال الرسم.

أ $ص = |س + ٢|$

ب $ص = |٣ - س|$

ج $ص = \left|٥ - \frac{١}{٢}س\right|$

١٠) د(س) = $|٥ - ٢س| + ٣$ حيث $٢ \geq س \geq ٨$ أوجِد مدى الدالّة د .

١١) أ ارسم التمثيل البياني للدالّة ص = $٢|س - ٢| + ١$ حيث $-٢ < س < ٦$، مبينًا إحداثيات نقطة الرأس والمقطع الصادي.

ب ارسم على المخطط نفسه ص = س + ٢

ج استخدم التمثيل البياني لحل المعادلة $٢|س - ٢| + ١ = س + ٢$

◀ دالـــــة الصحيح : د(س) = [س] وتقرأ صحيح س

أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ [٥]　　ب [٤ , ٢]　　ج [٤ , ٩٩]

هـ [-١ , ٣]　　و [-٩ , ٣]　　ز [-٤]

التمثيل البياني لدالة الصحيح

بيان دالة الصحيح غير مألوف.

لرسم بيان د(س) = [س]　حيث -٥ ≤ س < ٦ :

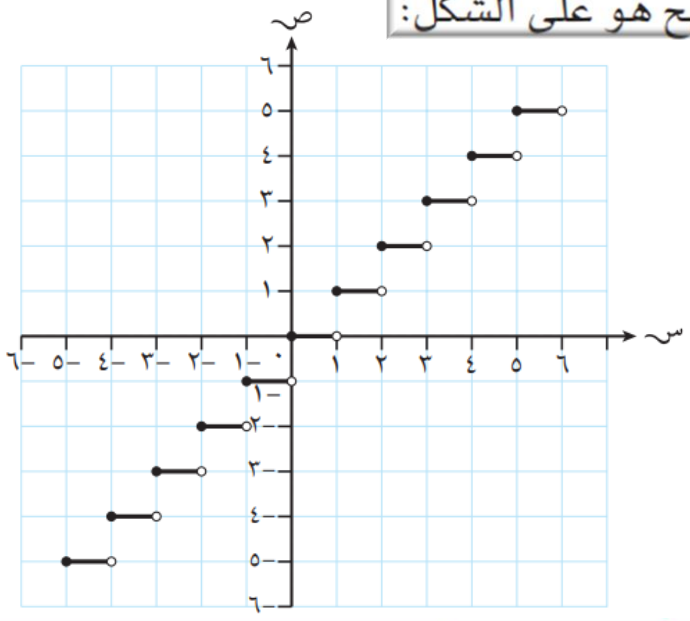
فمثلًا: عندما ٤ ≤ س < ٥ نجد أن :

[٤] = [٤ , ١] = [٤ , ٥] = [٤ , ٩] = [٤ , ٩٩] = [٤ , ٩٩٩٩٩٩٩] = ٤

يمكننا رسم هذا على خط أعداد عادي على شكل خط عليه دائرة صغيرة ممتلئة عند نقطة انتهاء اليسار، ودائرة صغيرة فارغة عند نقطة انتهاء اليمين (ما يشير إلى أن ٤ هو جزء من المجموعة بينما ٥ ليس كذلك).

وبالتالي فإن التمثيل البياني لدالّة الصحيح هو على الشكل:

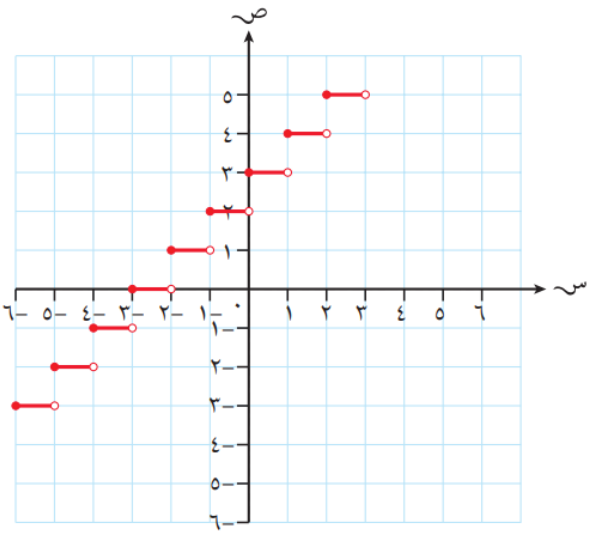
لرسم بيان د(س) = [س]



1 ارسم الدالّة ص = [س] + ٣

الحــلّ:

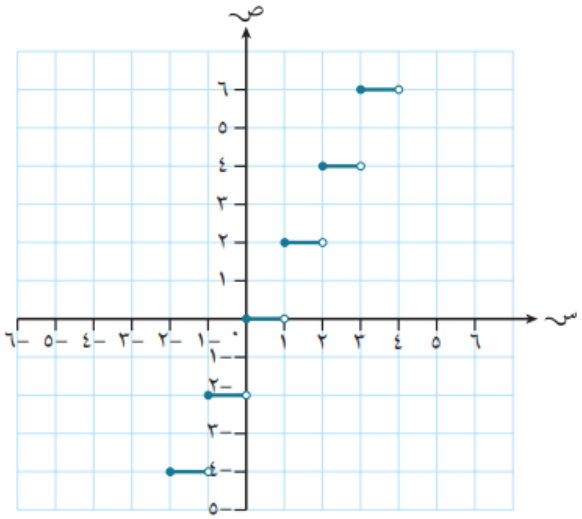
تمّ إزاحة التمثيل البياني للدالة ص = [س] إلى الأعلى بمقدار ٣



2 ارسم الدالّة ص = ٢ [س]

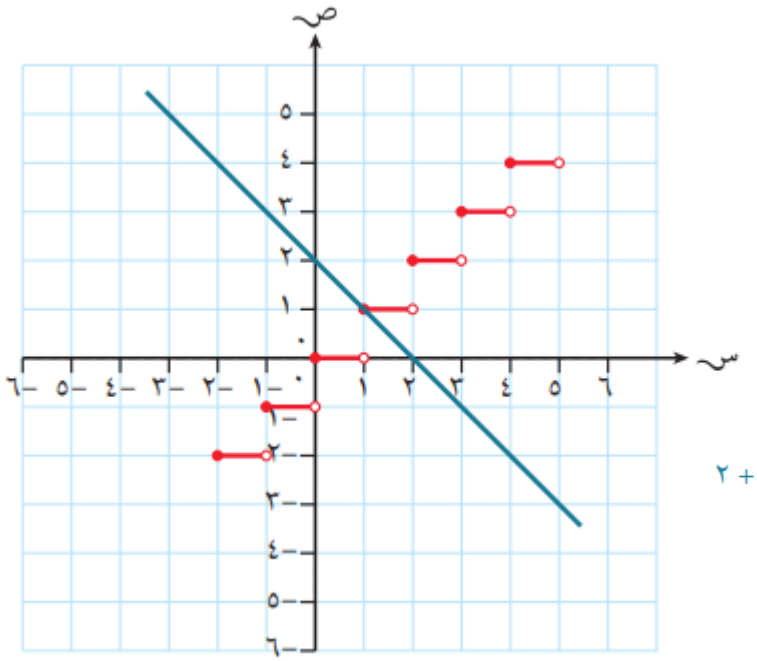
الحــلّ:

تم إجراء تمدد رأسي للدالة ص = [س] بمقدار ٢



3 ارسم الدالّة ص = [س] والدالّة ص = − س + ٢ في المستوى الإحداثي نفسه، واستخدمهما لحل المعادلة [س] = − س + ٢

الحــلّ:



تتقاطع الدالتان عند س = ١

تحقق من الإجابة من خلال تعويض س = ١ في [س] = − س + ٢

[١] = −١ + ٢ يعطي ١ = ١، وهي عبارة صحيحة.

تمارين أكثر

٢) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\left[\frac{٥}{٣} - ٤\right]$

ب $\left[\frac{٥}{٣}\right] - [٤]$

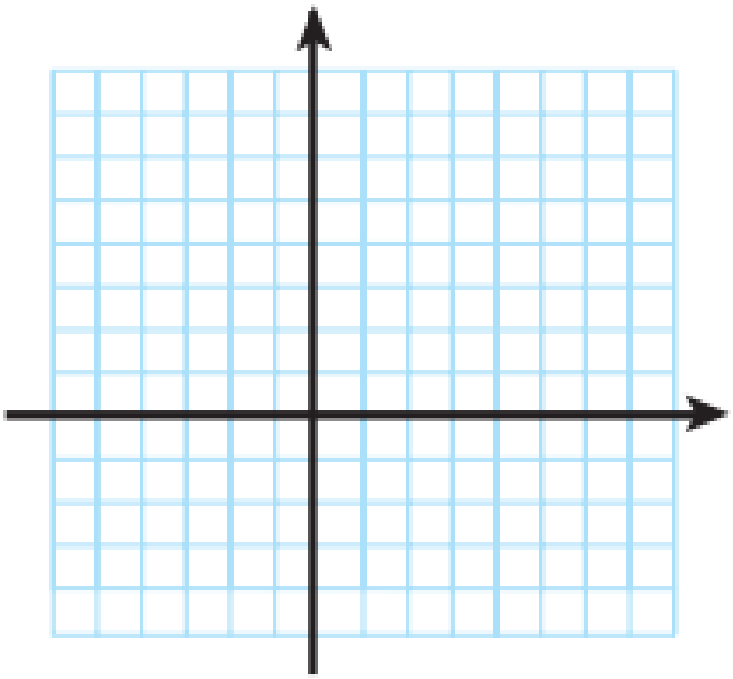
ج $\left[\frac{٢٥}{٧} + \frac{١}{٢}\right]$

هـ $\left[\frac{١}{٤} \times ١٠\right]$

ز $\left[\left|\frac{٣}{٥} \times ١٢-\right|\right]$

ح $\left|\left[\frac{٣}{٥} \times ١٢-\right]\right|$

٣) أ ارسم بيان كل دالة من الدوال: ص = [س] ، ص = ٢س على المستوى الإحداثي نفسه.



الواجب

١) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $[١٧,٨٨]$ ب $\left[\frac{٨٠}{٣}\right]$

٢) أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ $\left[٨ + \frac{١٠}{٩}\right]$ ب $[٨] + \left[\frac{١٠}{٩}\right]$

٣) ارسم التمثيل البياني للدوال الآتية:

أ د(س) = [س] − ٤

ب د(س) = ٣[س]

٤) ارسم التمثيل البياني للدالتَين ص = [س]، ص = ٤س + ١ في المستوى الإحداثي نفسه، واستخدمهما لحل المعادلة [س] = ٤س + ١

٤) استخدم التمثيل البياني لحل المعادلة $|[\text{س}]| = \text{س} + ١,٥$

الدالة اللوغاريتمية

مفهوم اللوغاريتمات ، لنفترض أننا نبدأ بالرقم ٢، ونقول إننا نرفعها إلى قوة ما، فماذا يجب أن تكون هذه القوة للحصول على ١٦؟

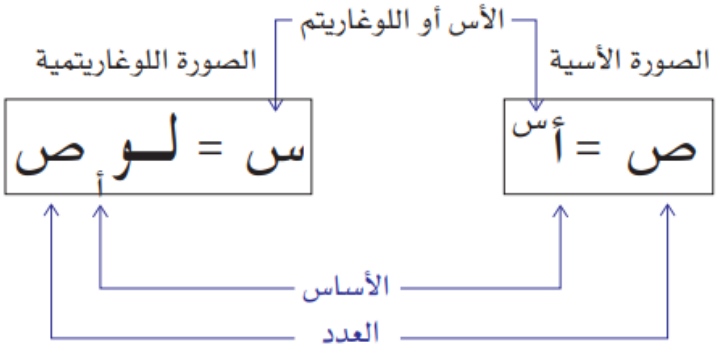
بالتأكيد ستكون القيمة المجهولة (س) هي ٤ . وهذا هو جوهر اللوغاريتمات،

أي أن اللوغاريتم هو عدد ما بالنسبة إلى أساس ما .

الدالة اللوغاريتمية وعلاقتها بالدالة الأسية

مُساعَدة

تسمى لـو$_{أ}$ س = ص الصورة اللوغاريتمية.
وتسمّى ب^{ص} = س الصورة الأسية المكافئة لها .



1 حوّل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية:

أ ١٠^{٣} = ١٠٠٠

ب ١٠^{س} = ٥٠٠

2 حوّل كلًا مما يأتي من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية:

أ لـو$_{١٠}$ ١٠٠٠٠ = ٤

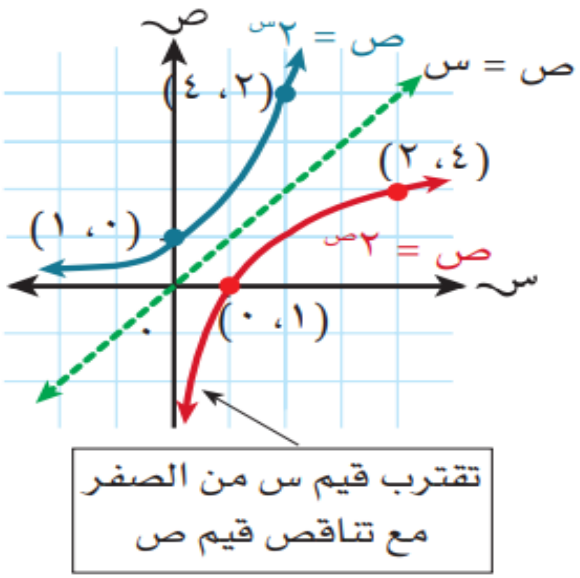
ب لـو$_{١٠}$ س = ١,٢

الدوال والعبارات اللوغاريتمية

يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية د(س) = ٢^س من خلال تبديل قيم س و ص للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

ص = ٢^س	
س	ص
-٣	$\frac{١}{٨}$
-٢	$\frac{١}{٤}$
-١	$\frac{١}{٢}$
٠	١
١	٢
٢	٤
٣	٨

ص = ٢^ص	
س	ص
$\frac{١}{٨}$	-٣
$\frac{١}{٤}$	-٢
$\frac{١}{٢}$	-١
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية لدالة ص = ٢^س هي س = ٢ص.

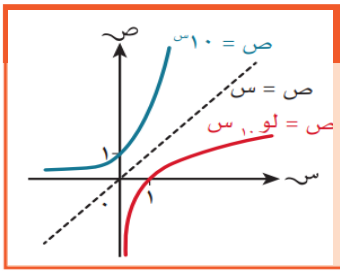
اللوغاريتم للأساس ١٠

نتيجة ١

إذا كان ص = ١٠^س، فإن س = لـو_١٠ ص

ص = ١٠^س، و ص = لـو_١٠ س دالتان كل منهما عكسية للأخرى.

وتقرأ ص = ١٠^س تكافئ س = لـو_١٠ ص



يوجد على الآلة الحاسبة مفتاح لـو للأساس عشرة وهو log أو lg.

1

أ حوّل $١٠^{س} = ٥٨$ إلى الصورة اللوغاريتمية.

ب حل $١٠^{س} = ٥٨$ واكتب الإجابة مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

2

بدون استخدام الآلة الحاسبة، املأ الجدول الآتي، وبرر إجابتك.

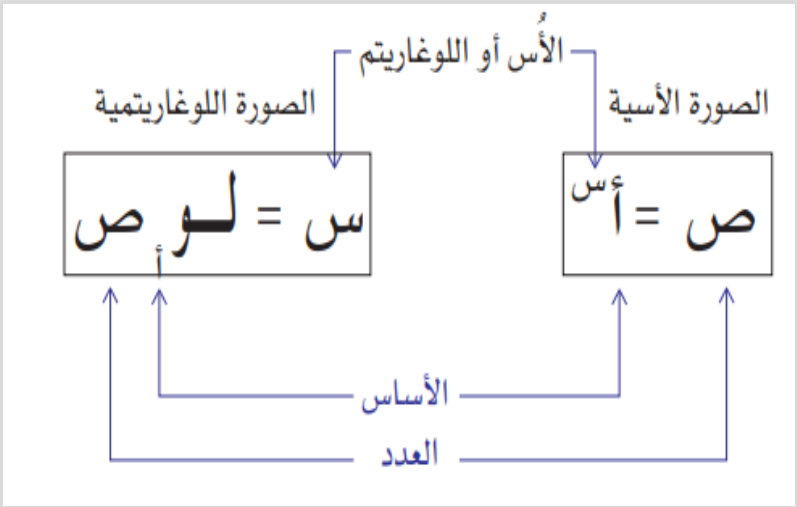
$لو_{١٠}$ ٠,٠١	$لو_{١٠}$ ٠,١	$لو_{١٠}$ ١	$لو_{١٠}$ ١٠	$لو_{١٠}$ ١٠٠	$لو_{١٠}$ ١٠٠٠
.....	.....	٠	١	.....	.....

3

أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ لـو ١٠٠٠٠ ب لـو ٠,٠٠٠١ ج لـو $\sqrt{١٠^{١٠٠٠}}$

اللوغاريتم للاساس أ



مثال توضيحي

4 حوّل $٥^{٣} = ١٢٥$ إلى الصورة اللوغاريتمية.

5 حوّل كلًا ممّا يأتي من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية:

أ $لـو_{٢} ٨ = ٣$ ب $لـو_{٣} ٨١ = ٤$ ج $لـو_{٨} ١ = ٠$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كان س، ص عددَين موجبَين،
أ > ٠، أ ≠ ١، فإن:

$$\text{لو}_{أ}(س\,ص) = \text{لو}_{أ} س + \text{لو}_{أ} ص$$

$$\text{لو}_{أ}\left(\frac{س}{ص}\right) = \text{لو}_{أ} س - \text{لو}_{أ} ص$$

$$\text{لو}_{أ}(س)^{م} = م\,\text{لو}_{أ} س$$

$$\text{لو}_{أ}\left(\frac{١}{س}\right) = -\text{لو}_{أ} س$$

1 أوجِد قيمة:

أ $\text{لو}_{٣} ١٦$

ب $\text{لو}_{٣} \frac{١}{٩}$

2 اكتب كلًا ممّا يأتي في أبسط صورة:

أ $\text{لو}_{٣} ٧ + \text{لو}_{٣} ١١$

ب $\frac{\text{لو}_{٣} ١٢٨}{\text{لو}_{٣} ١٦}$

ج $\frac{\text{لو}_{٣} ٢٥}{\text{لو}_{٣} ٠,٠٤}$

د $٢\,\text{لو}_{٣} ٨ - ٥\,\text{لو}_{٣} ٢$

ي $٣\,\text{لو}_{٥} ٢ + \frac{١}{٢}\text{لو}_{٥} ٣٦ - \text{لو}_{٥} ١٢$

3 بسّط كلًّا ممّا يأتي علمًا بأن ب > ٠

أ ١) لـو$_{ب}$ ب^{٤}

٢) لـو$_{ب}$ $\sqrt{ب}$

ب ١) لـو$_{ب}$ ب^{٣} $\sqrt{ب}$

٢) لـو$_{ب}$ ب^{٢} − لـو$_{ب}$ $\sqrt{ب}$

4 إذا علمت أن س = لـو أ، ص = لـو ب، ع = لـو جـ، فاكتب كلًّا ممّا يأتي بدلالة س، ص، ع:

أ ١) لـو ب^{٧}

٢) لـو أ^{٢} ب

4 إذا علمت أن لـو$_{أ}$ س = ٧، لو$_{أ}$ ص = ٤، فأوجد قيمة الآتي:

أ لـو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$

3 بدون استخدام الآلة الحاسبة، بسّط $\frac{\text{لـو}_{٥}\ ١٢٥}{٢\text{لـو}_{٥}\ ٢٥}$ مبيّنًا خطوات الحل:

4 أوجِد الصورة المكافئة لكل من العبارات الآتية:

أ ١) $٧\ \text{لـو}_{هـ}\ س - ٢\ \text{لـو}\ س$

ب ١) $(\text{لـو}_{هـ}\ س - ١)(\text{لـو}_{هـ}\ ص + ٣)$

ج ١) $\frac{\text{لـو}_{هـ}\ أ + \text{لـو}_{هـ}\ ب}{\text{لـو}_{هـ}\ أ\ \text{لـو}_{هـ}\ ب}$

٢) $\frac{(\text{لـو}_{هـ}\ أ)^{٢} - ١}{\text{لـو}_{هـ}\ أ - ١}$

اللوغاريتم الطبيعي

يوجد نوع آخر من اللوغاريتمات أساسه العدد النيبيري هـ.

هـ هو عدد غير نسبي و ≈ ٢,٧١٨

تُسمّى الدالة ص = هـ^{س} **دالة الأسّ الطبيعي** **natural exponential function**.

اللوغاريتم للأساس هـ يسمى **اللوغاريتم الطبيعي** **natural logarithms**. ويرمز إليه بالرمز لـو$_{هـ}$ أو لط.

يستخدم لـو$_{هـ}$ س أو لط س للتعبير عن اللوغاريتم الطبيعي لـ س

---

1 استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة كلٍّ مما يأتي مقربة إلى ٣ أرقام معنوية:

أ هـ^{٢} ب هـ^{٠,٥}

---

2 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ مما يأتي مقرّبًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ لط ١ ب لط ٠,٥

---

3 بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجِد قيمة كل من:

أ هـ$^{\text{لط }٢^{٢}}$ ب هـ$^{\frac{١}{٢}\text{لط }٤}$

4

حلّ المعادلات الآتية:

أ $هـ^{لط\ س} = ١$

ب $هـ^{٢س - ١} = ٨$

ج $هـ^{٢\ لط\ س} = ١٦$

د لط(٣س + ١) = −١

ط لط(س + ٣) − لط س = ٤

ي لط(١ + $س^{٢}$) = ١ + ٢ لط س

حل المعادلات الأسّية

١) أوجد قيمة س مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ ١) $٣ \times ٤^{س} = ٩٠$

٢) $١٠٠٠ \times ١,٠٢^{س} = ١٠٠٠٠$

ب ١) $٦ \times ٧^{س+١} = ١,٢$

٢) $٥ \times ٢^{٢س-٥} = ٩٤$

ج ١) $٣^{٢س} = ٤^{س-١}$

٢) $٥^{س} = ٦^{س-١}$

2 أوجِد حلّ المعادلة $٤ \times ٣^{س - ٥} = ١$

3 حلّ المعادلة $٥^{٤س + ٣} = ٢٨$ مقرّبًا الإجابة إلى ٣ أرقام معنوية.

4 حلّ المعادلة $٢^{٣س - ١} = ٥^{٢ - س}$ ، واكتب الناتج في صورة س = $\frac{\text{لـو أ}}{\text{لـو ب}}$ حيث أ، ب أعداد ثابتة.

5 حل المعادلات الآتية:

أ ١) $٤^{س} - ٥ \times ٢^{س} + ٦ = ٠$

٢) $٩^{س} - ٦ \times ٣^{س} + ٨ = ٠$

ب ١) $٩^{س} - ٨ \times ٣^{س} = ٩$

٢) $٢٥^{س} - ٥^{س} = ٦$

د ١) $لـو_{٤} س = (لـو_{٤} س^{٢})^{٢}$

٢) $(لـو_{٣} س)^{٢} - ٣ لـو_{٣} س + ٢ = ٠$

حل المعادلات اللوغاريتمية

6 حل المعادلة لـو$_{١٠}$ (٩س + ١) = ٣

7 حلّ المعادلة ٣(١ + لـو س) = ٦ + لـو س

8 أوجِد كل قيم س التي تحقق (لـو$_{٣}$ س)^{٢} = ٤